TD 3 : Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$ Indications

(In)équations dans $\mathbb{R}$

1 ★ Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

On peut réécrire cela comme une simple équation impliquant un polynôme du second degré.

2 ★★ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$
2) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5$
3) $|2x-5| = \left|x^2-4\right|$
4) $\left|x^2-x\right| = x+1$
5) $x^3 - 2x - 1 = 0$
6) $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$

Pour les racines carrées, il faut passer au carré pour les éliminer. Pour les valeurs absolues, il faut discuter du signe des expressions à l'intérieur pour les enlever.

3 ★★ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $|x+1| \leq |x-2|$
2) $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$
3) $x-2 \geq \sqrt{3x+4}$
4) $|x+1| + |x-3| \leq 6$
5) $x + \sqrt{x^2-5x+4} < 2$
6) $\sqrt{|x+2|} \leq |x-10|$

Pour les racines carrées, il faut passer au carré pour les éliminer. Pour les valeurs absolues, il faut discuter du signe des expressions à l'intérieur pour les enlever.

4 ★★ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$
2) $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+2}{x+3}$
3) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geq 1$
4) $\left|\dfrac{1}{x} - 2\right| \leq 3$

5 ★★ On cherche à résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les (in)équations suivantes, dont l'inconnue est un réel x :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$$

1) On suppose $a < 0$. Quelles sont les solutions dans ce cas ?
2) Même question si $a \in [0, 1[$.
3) On suppose désormais $a \geq 1$. Résoudre l'équation en exprimant les solutions pour x en fonction de a.

1) Peut-on avoir $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < 0$?
2) Peut-on avoir $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < 1$?
3) Passer au carré mais bien mettre une racine de part et d'autre de l'égalité avant de passer au carré.

6 ★★★ Résoudre $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$

Multiplier tout par 3 et faire apparaitre $(x+1)^3$

Identités algébriques

7 ★★ Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$.

1) Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2) En déduire que si $x \geq y$, on a $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$
3) En déduire que :

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

1) Passer au carré avec les justifications qui s'imposent.
2) S'inspirer de la preuve de la seconde inégalité triangulaire...

8 ★★☆ Soit a, b, c trois nombres réels.

1) Démontrer que $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$ et $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.
2) En déduire que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

1) Mettre tout du même côté de l'inégalité, reconnaitre une identité remarquable.
2) Utiliser la première formule démontrée en 1.

Partie entière

9 ★★☆ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ si et seulement si $x \in \mathbb{Z}$.

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x.

10 ★★ Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x. Idem pour y, avec une partie fractionnaire différente ε'.

11 ★★ Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Utiliser le fait que $x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon$, avec ε la partie décimale de x.

12 ★★☆ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$$

Développer l'expression au carré et simplifier l'égalité à montrer. Pour montrer que $\lfloor a \rfloor = b$, on peut montrer que $\lfloor a \rfloor \leq b$ et que $\lfloor a \rfloor \geq b$.

13 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$.

On pourra poser $k = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = x - k \in [0, 1[$ et résoudre une équation avec deux inconnues : k et ε.